〈解答〉

$\boxed{1}$ (1) 20本　(2) n^2+3n〔本〕　(3) 154本

$\boxed{2}$ (1) $16\pi\ \mathrm{cm}^2$　(2) $12\pi\ \mathrm{cm}$　(3) $\dfrac{116}{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$

配点　各2点　12点満点

〈解説〉

$\boxed{1}$ (1) 最も外側のマッチ棒の本数は,

1番目　…　4本
2番目　…　8本
3番目　…　12本

なので,

n番目　…　$4n$〔本〕

と表される。よって，5番目では

$4\times5=20$〔本〕

である。

(2) 内部のマッチ棒の本数は,

1番目　…　0本
2番目　…　2×1〔本〕
3番目　…　$2\times(1+2)$〔本〕

なので,

n番目　…　$2\times\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$〔本〕

と表される。{　}内は1から$(n-1)$までの自然数の和になるので,

$$2\times\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$$
$$=2\times\frac{1}{2}(n-1)n$$
$$=n^2-n\text{〔本〕}$$

となる。n番目をつくるために必要なマッチ棒の本数は，最も外側のマッチ棒の本数と内部のマッチ棒の本数の和になるので,

$4n+(n^2-n)=n^2+3n$〔本〕

である。

(3) 頭薬が下向きのマッチ棒の本数は,

1番目　…　1本
2番目　…　$(1+2)$〔本〕
3番目　…　$(1+2+3)$〔本〕

なので,

p番目　…　$(1+2+3+\cdots+p)$〔本〕

と表される。(　　)内は1からpまでの自然数の和になるので，

$$(1+2+3+\cdots+p)=\frac{1}{2}p(p+1)〔本〕$$

となる。これが66本であることから，

$$\frac{1}{2}p(p+1)=66$$

という方程式が成り立ち，この方程式を解くと，

$p=-12,\ 11$

となるが，$p>0$ なので，

$p=-12$は問題に合わない。

$p=11$は問題に合う。

したがって，11番目の正方形をつくるのに使ったマッチ棒の本数は，(2)の解説より，

$$p^2+3p=11^2+3\times11$$
$$=154〔本〕$$

であることが求められる。

$\boxed{2}$ (1)　半径が

$4\div2=2$〔cm〕

の球なので，その表面積は

$4\pi\times2^2=16\pi$〔cm^2〕

である。

(2)　XYの長さは，球が3回転して進む長さなので，

$2\pi\times2\times3=12\pi$〔cm〕

である。

(3)　下の図のように，中央の部分は底面の半径が2cm，高さが7cmの円柱になるので，その体積は

$\pi\times2^2\times7=28\pi$〔cm^3〕

となる。また，両端は半径が2cmの半球なので，その体積は

$$\frac{4}{3}\pi\times2^3\div2=\frac{16}{3}\pi〔cm^3〕$$

となる。したがって，全体の体積は

$$28\pi+\frac{16}{3}\pi\times2=\frac{116}{3}\pi〔cm^3〕$$

である。