〈解答〉

1 ⑴　3段　⑵　式：$2y-x$　兄が勝った回数：7回

2 ⑴　15通り　⑵　$\frac{1}{6}$

3 ⑴　$a=72$　⑵　$y=\frac{18}{25}x$　⑶　$-3\leqq m\leqq -\frac{6}{5}$

配点　各2点　14点満点

〈解説〉

1

⑴　兄は3回勝って2回負けたので，50段目より

$2\times3-1\times2=4$〔段〕上にいる。

また，弟は2回勝って3回負けたので，50段目より

$2\times2-1\times3=1$〔段〕上にいる。

よって，兄と弟のいる段の差は，

$4-1=3$〔段〕である。

⑵　20回じゃんけんをしたうち，あいこの回数が8回，兄が勝った回数がx回，弟が勝った回数がy回なので，じゃんけんの回数について，

$8+x+y=20$　…①という式が成り立つ。

兄はx回勝ってy回負けたので，50段目より

$2\times x-1\times y=(2x-y)$〔段〕上にいる。

また，弟はy回勝ってx回負けたので，50段目より

$2\times y-1\times x=(2y-x)$〔段〕上にいる。

兄は弟より6段上にいたことから，

$(2x-y)-(2y-x)=6$　…②という式が成り立つ。

①を整理して，$x+y=12$　…③

②を整理して，$3x-3y=6$

両辺を3で割って，$x-y=2$　…④

③，④を連立方程式として解くと，$x=7$，$y=5$となる。

よって，兄が勝った回数は7回，弟が勝った回数は5回となり，これらは問題に合う。

$\boxed{2}$

⑴　$m < n$ になるのは,

・$m = 1$ のとき，$n = 2, 3, 4, 5, 6$ の5通り

・$m = 2$ のとき，$n = 3, 4, 5, 6$ の4通り

・$m = 3$ のとき，$n = 4, 5, 6$ の3通り

・$m = 4$ のとき，$n = 5, 6$ の2通り

・$m = 5$ のとき，$n = 6$ の1通り

$m = 6$ のときにはないので，$m < n$ になる場合の数は,

$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$〔通り〕である。

⑵　$2^m \times 3^n < 50$ になるのは,

・$m = 1$ のとき，$n = 1, 2$ の2通り

・$m = 2$ のとき，$n = 1, 2$ の2通り

・$m = 3$ のとき，$n = 1$ の1通り

・$m = 4$ のとき，$n = 1$ の1通り

$m = 5, 6$ のときにはないので，$2^m \times 3^n < 50$ になる場合の数は,

$2 + 2 + 1 + 1 = 6$〔通り〕である。

また，m，n のすべての場合の数は $6 \times 6 = 36$〔通り〕なので，求める確率は

$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ である。

$\boxed{3}$

⑴　点Aの座標は$(6,\ 12)$なので，関数㋑の式である

$y = \frac{a}{x}$ に，　$x = 6$，$y = 12$ を代入すると,

$12 = \frac{a}{6}$

これを解いて,

$a = 72$

⑵　点C$(10,\ 0)$は点Bから x 軸に引いた垂線と x 軸との交点なので，点Bの x 座標は10である。よって，⑴で求めた関数㋑の式 $y = \frac{72}{x}$ に，$x = 10$ を代入すると,

$$y = \frac{72}{10}$$

$$= \frac{36}{5}$$

よって，B$\left(10,\ \frac{36}{5}\right)$ である。

関数㋒のグラフは点Bを通るので，関数㋒の式を

$y=px$ とおき，$x=10$，$y=\frac{36}{5}$を代入すると，

$$\frac{36}{5}=10p$$

これを解いて，

$$p=\frac{18}{25}$$

よって，関数㋒の式は，

$y=\frac{18}{25}x$ である。

(3)　点Aを通って線分BCと交わる直線の傾き m は，線分BCの両端の点である点Cを通るときが最も小さく，点Bを通るときが最も大きい。

A(6，12)，C(10，0)を通るとき，

$$\begin{aligned} m &= \frac{0-12}{10-6} \\ &= \frac{-12}{4} \\ &= -3 \end{aligned}$$

A(6，12)，B$\left(10,\ \frac{36}{5}\right)$を通るとき，

$$\begin{aligned} m &= \frac{\frac{36}{5}-12}{10-6} \\ &= \left(\frac{36}{5}-12\right)\div(10-6) \\ &= -\frac{24}{5}\div 4 \\ &= -\frac{6}{5} \end{aligned}$$

以上より，m の値の範囲は，

$-3\leqq m\leqq -\frac{6}{5}$である。